$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue en } L \end{array}\right\} \Rightarrow L \text{ est solution de } f(x) = x$$

Or $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha$

D'où $L=0$ ou $L=\alpha$

Par suite $L=\alpha$ car $1 \leq L \leq \alpha$.

B)1/ $\oplus$ la fonction $\psi(x) = 1 - \frac{1}{x} - \text{Log}x$; $\forall x \in]1;+\infty[$

ψ est continue et dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$;

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2} < 0$$

$\Rightarrow \psi$ est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

$\Rightarrow \psi(]1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x); \lim\limits_{x\to1^+} \psi(x)\right[= \left]\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x); 0\right[$

D'où $\forall x \in]1;+\infty[; \psi(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; 1-\frac{1}{x}-\text{Log}x < 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; 1 - \frac{1}{x} < \text{Log}x$

$\boxplus$ Soit la fonction $\phi(x) = \text{Log}x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$; $\forall x \in]1;+\infty[$

ϕ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$;

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2} = \frac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{2x^2} < 0$$

Donc ϕ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

$\Rightarrow \phi(]1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x); \lim\limits_{x\to1^+} \phi(x)\right[= \left]\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x); 0\right[$

$\Rightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \phi(x) = \text{Log}x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \text{Log}x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Bilan : $\forall x \in]1;+\infty[; 1 - \frac{1}{x} < \text{Log}x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

2/ Soit la fonction φ_n définie par $\varphi_n(x) = f_n(x) - x$.

Désignons par D_n le domaine de définition de φ_n.

$x \in D_n \Leftrightarrow 1 + nx > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{n}$.

D'où $D_n =]-\frac{1}{n};+\infty[$.

φ_n est dérivable sur $D_n =]-\frac{1}{n};+\infty[$ et $\varphi_n'(x) = \frac{n}{1+nx} - 1 = \frac{n-1-nx}{1+nx}$

D'où le tableau de variation de φ_n